نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **مشتق**

@sabertarkibi

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۲

راه حل اول:

$$g'(x) = 3x^2 f'(x) + (x^3 - 1) f''(x) + 6x f(x) + 3x^2 f'(x)$$

$$g'(1) = 3f'(1) + 0 + 6f(1) + 3f'(1) = 6f(1) + 6f'(1)$$

از طرف دیگر $f(1) = \frac{4}{3}$ و $f'(x) = \frac{(3x^2+2x+1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^3+x^2+x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

$$= \frac{6\times 3-3\times 4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow g'(1) = 6 \times \frac{4}{3} + 6 \times \frac{2}{3} = 12$$

راه حل دوم:

$$g(x) = ((x^3 - 1) f(x))'$$

$$(x^3 - 1) f(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) \times \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1} = x^4 - 1$$

$$\Rightarrow g(x) = 4x^3 \Rightarrow g'(x) = 12x^2 \Rightarrow g'(1) = 12$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۴

در نقطه‌ای به طول x که منحنی بر محورx ها مماس است، داریم:

$$f'(x) = f(x) = 0$$

$$f'(x) = 6x^2 + K = 0 \Rightarrow K = -6x^2 (*)$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله } f(x)=0} 2x^3 - 6x^3 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow -4x^3 = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \xrightarrow{(*)} K = -6x^2 = -6\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{2}$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۱

عبارت $3 - 4\cos^3 x$ عامل صفرکننده است. پس کافی است فقط از آن مشتق بگیریم:

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(0 + 8 \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} \times \sin^2\frac{\pi}{6}$$

$$= 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+۳h)-f(۲-h)}{۲h} = \frac{۳-(-۱)}{۲} f'(۲) = ۲f'(۲) = ۳$$

$$\Rightarrow f'(۲) = \frac{۳}{۲}$$

$$\left(f\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)\right)' = \frac{-۱}{۲\sqrt{x^۳}} f'\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(f\left(\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)\right)'\Big|_{x=\frac{۱}{۴}} = -۴f'(۲) = (-۴)\left(\frac{۳}{۲}\right) = -۶$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۳

$$f\left(x+\sqrt{x^۲+۳x}\right) = \frac{۱}{x} \xrightarrow{\text{مشتق گیری}}$$

$$\left(۱+\frac{۲x+۳}{۲\sqrt{x^۲+۳x}}\right) f'\left(x+\sqrt{x^۲+۳x}\right) = -\frac{۱}{x^۲} (*)$$

باید ورودی تابع f برابر ۳ باشد، در نتیجه باید داشته باشیم:

$$x+\sqrt{x^۲+۳x} = ۳ \Rightarrow \sqrt{x^۲+۳x} = ۳-x \Rightarrow x^۲+۳x = ۹+x^۲-۶x$$

$$\Rightarrow ۹x = ۹ \Rightarrow x = ۱$$

$$\xrightarrow{(*)} \left(۱+\frac{۵}{۴}\right) f'(۳) = -\frac{۱}{۱} \Rightarrow \frac{۹}{۴} f'(۳) = -۱ \Rightarrow f'(۳) = -\frac{۴}{۹}$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۱

$$f'(x) = -۲\sin x\cos^۳ x - ۳k\sin ۳x$$

$$f''(x) = -۲\cos^۳ x + ۴\sin^۲ x\cos x - ۹k\cos ۳x$$

$$f''(x) = -۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ + ۴\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲\left(\frac{۱}{۲}\right) - ۹k(-۱) = \frac{۵}{۴} + ۹k$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۴} + ۹k = \frac{۱}{۴} \Rightarrow k = -\frac{۱}{۹}$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

از طرفین رابطه داده شده مشتق می‌گیریم:

$$5f'(x) - \frac{3}{x^2}f'(\frac{1}{x}) = 1 \qquad (I)$$

از طرفین (I) مجدداً مشتق می‌گیریم:

$$5f''(x) + \frac{6}{x^3}f'(\frac{1}{x}) + \frac{3}{x^4}f''(\frac{1}{x}) = 0 \qquad (II)$$

$$I) \xrightarrow{x=1} 5f'(1) - 3f'(1) = 1 \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$II) \xrightarrow{x=1} 5f''(1) + 6f'(1) + 3f''(1) = 0 \Rightarrow 8f''(1) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow f''(1) = -\frac{3}{8}$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\begin{cases} g(2) = 11 \\ g'(2) = 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{x^2g'(x) - 2xg(x)}{x^4} \xrightarrow{x=2}$$

$$f'(2) = \frac{4g'(2) - 4g(2)}{16} = \frac{12-44}{16} = -2$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

از طرفین رابطه، مشتق می‌گیریم:

$$f(x^2 - 3x) = g(\frac{2x}{x^2+1})$$

$$\Rightarrow (2x - 3) \times f'(x^2 - 3x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} \times g'(\frac{2x}{x^2+1})$$

$$\xrightarrow{x=1} (-1) \times f'(-2) = \frac{2\times2-4}{4} \times g'(1) \Rightarrow f'(-2) = 0$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\lim_{x\to ۱} \frac{f^{۲}(x)-۴f(x)+۳}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(f(x)-۳)(f(x)-۱)}{x-۱}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{(f(x)-f(۱))(f(x)-۱)}{x-۱}$$

$$= f'(۱) \times \lim_{x\to ۱} (f(x) - ۱) = ۲f'(۱)$$

$$\Rightarrow ۲f'(۱) = ۱۰ \Rightarrow f'(۱) = ۵$$

$$y = f(۳x) \Rightarrow y' = ۳f'(۳x) \xrightarrow{x=\frac{۱}{۳}} y' = ۳f'(۱) = ۳ \times ۵ = ۱۵$$